

Unidad 3

Tensiones y deformaciones Normales en Sistemas Hiperestáticos

3.1 Objetivos

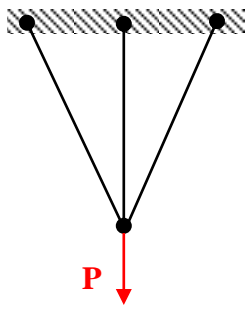
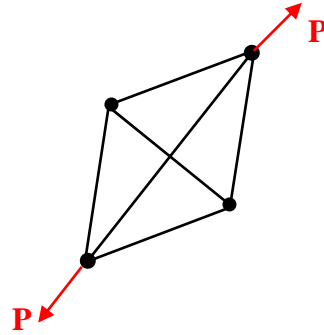
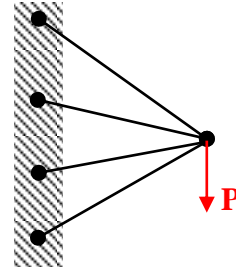
Al terminar el estudio de esta unidad usted deberá ser capaz de resolver los siguientes objetivos trazados para el Estudio de tensiones normales y cortantes en sistemas Hiperestáticos.

1. Conocer cuales son los sistemas estructurales Hiperestáticos y su grado de hiperstaticidad de las mismas.
2. Explicar porque un sistema se convierte en hiperestático.
3. Listar los pasos para dar solución a un sistema hiperestático.
4. Analizar sistemas hiperestáticos sometidos a cargas externas, errores de montaje o variaciones de temperatura; determinando sus fuerza, tensiones, deformaciones y desplazamientos de cada uno de los elementos o barras elásticas que componen el sistema.
5. Conociendo sus materiales, propiedades, tensiones y deformaciones normales de los distintos elementos que componen el sistema hiperestático, tenemos que saber dimensionar las secciones necesarias de los mismos.
6. Analizar las tensiones y deformaciones en cilindros de pared delgada, sometidos a presión.

3.2 Introducción

Un sistema hiperestático o estáticamente indeterminado, es aquel en cual no es posible determinar las fuerzas internas de sus elementos debido a que el numero de incógnitas excede al numero de ecuaciones que nos brinda la estática. Físicamente un sistema se convierte en hiperestático cuando el numero de sus elementos (incluyendo soportes) es mayor que el numero necesario para guardar su equilibrio estático; hay que aclarar que estos elementos adicionales llamados vínculos superfluos no garantizan el equilibrio de una estructura, si no vienen dados por exigencias de rigidez y resistencia .

El grado de hiperstaticidad de un sistema estructural lo determina el número de vínculos superfluos o elementos en exceso que tenga.

Ejemplo:1^{er} grado de hiperestaticidad1^{er} grado de hiperestaticidad2^{er} grado de hiperestaticidad

3.3 Metodología de solución

En general, para dar solución a un sistema hiperestático se debe seguir los siguientes pasos que por su importancia los describimos como partes:

a) Parte geométrica

Se propone como se deforma los elementos que componen el sistema estructural partiendo de la condición que las deformaciones son conjuntas y mediante una relación geométrica entre las deformaciones de los elementos se plantean las **Ecuaciones de Compatibilidad de Deformación**. El numero de estas ecuaciones que se deben plantear esta en función del grado de hiperestaticidad del sistema, si es de primer grado se planteara una, si es de segundo grado se plantearan dos y así sucesivamente.

$$\text{Ecuaciones : } f(\Delta L_i)$$

En la practica para construir estas ecuaciones se sigue los siguientes pasos:

- Se dibuja un diagrama de cuerpo libre mostrando todos sus elementos incógnitos en un estado no deformado (**Estado inicial**)
- Se propone un diagrama de cuerpo libre deformado (**Estado final**) asumiendo el alargamiento y acortamiento de las barras incógnitas, manteniendo el principio que las deformaciones de las barras son en conjunto y haciendo cumplir las restricciones de movimientos de los apoyos ,articulaciones y barras rígidas que nos plantea la estructura..

- Del análisis de las deformaciones propuestas, por medio de comparaciones geométricas se crean relaciones entre las deformaciones incógnitas, llamadas ecuaciones de compatibilidad de deformación.

b) Parte estática

Partiendo del conocimiento de las deformaciones (alargamientos, acortamientos) asumidas en la parte geométrica adoptamos el sentido de las fuerzas internas de las barras incógnitas y mediante las ecuaciones que nos brinda la estática construimos relaciones de equilibrio que nos vinculan las fuerzas internas. Llamadas **Ecuaciones de Equilibrio Estático**.

$$\text{Ecuaciones : } f(N_i)$$

c) Parte física (Ley de Hooke)

Para cada elemento isostático que compone el sistema estructural hiperestático, se plantean las ecuaciones que relacionan las deformaciones incógnitas en función de las fuerzas internas normales incógnitas llamadas **Ecuaciones Físicas**.

$$\text{Ecuación para cada elemento incógnito} \quad \Delta L_i = \frac{N_i * L_i}{E_i * A_i}$$

d) Parte final

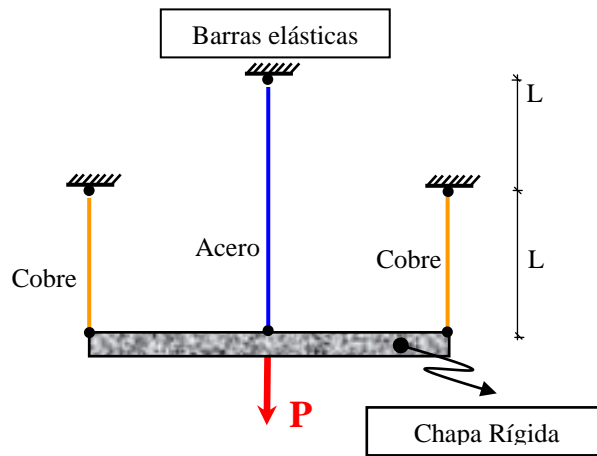
Una vez aplicada las ecuaciones físicas ya sea en la parte geométrica o en la parte estática, se contruye un sistema de ecuaciones de tal forma que las incógnitas sean las deformaciones o los esfuerzos internos, y se procede a resolver, determinando la solución al problema.

3.4 Problemas

3.4.1 Generales

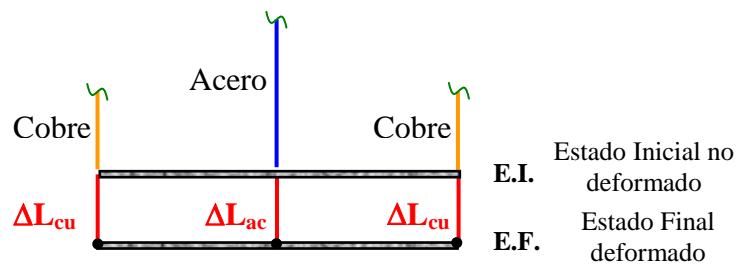
Ejemplo 1

Sean tres barras de un sistema colgante hiperestático como muestra la figura, las barras laterales son idénticas y de cobre, la barra central es de acero, ¿qué tensión se produce en las barras bajo la acción de una fuerza P?

Datos E_{cu} E_{ac} A_{cu} A_{ac} P L D **Incógnitas** $\sigma_{cu} = ?$ $\sigma_{ac} = ?$ **Solución:****a) Parte Geométrica:**

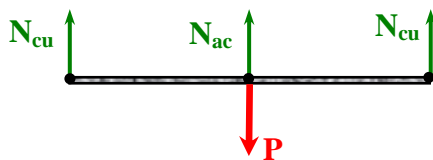
$$\Delta L_{ac} = \Delta L_{cu} \quad (1)$$

Ecuación de compatibilidad
de deformaciones



ΔL_{cu} = alarga, entonces N_{cu} (tracción)

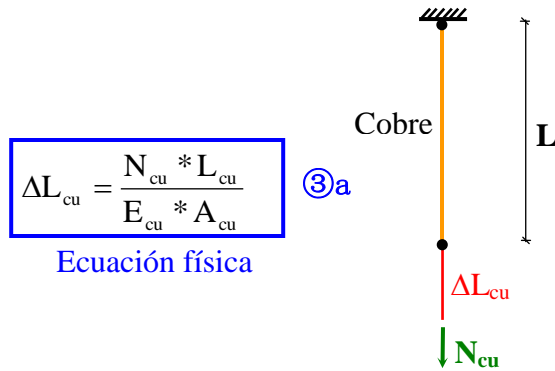
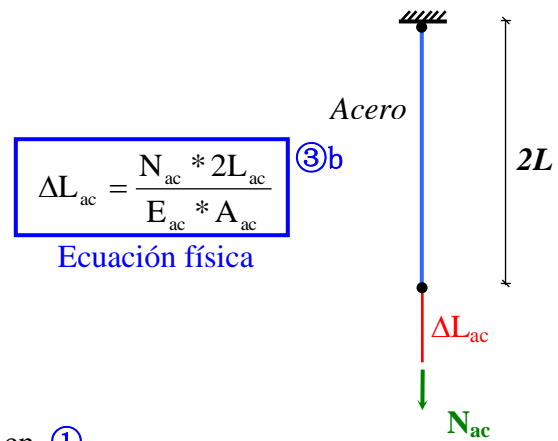
ΔL_{ac} = alarga, entonces N_{ac} (tracción)

b) Parte estática:

$$\sum F_V = 0$$

$$2N_{cu} + N_{ac} = P \quad (2)$$

Ecuación equilibrio estático

c) Parte física**c1) Barra Cu:****c2) Barra Ac****c) Parte final**

Reemplazando las ecuaciones físicas ③a y ③b en ①

$$\frac{N_{ac} * 2L_{ac}}{E_{ac} * A_{ac}} = \frac{N_{cu} * L_{cu}}{E_{cu} * A_{cu}}$$

$$N_{ac} = \frac{E_{ac} * A_{ac}}{2 * E_{cu} * A_{cu}} * N_{cu} \quad \text{Donde: } c_1 = \frac{E_{ac} * A_{ac}}{2 * E_{cu} * A_{cu}}$$

$$N_{ac} = c_1 * N_{cu} \quad ④$$

④ en ②

$$2N_{cu} + c_1 * N_{cu} = P$$

$$⑤ \quad N_{cu} = \frac{P}{2 + c_1} \longrightarrow \sigma_{cu} = \frac{N_{cu}}{A_{cu}}$$

⑤ en ④

$$N_{ac} = c_1 * \frac{P}{2 + c_1} \longrightarrow \sigma_{ac} = \frac{N_{ac}}{A_{ac}}$$

Ejemplo 2

Determinar las tensiones normales en las barras elásticas de acero mostradas en la figura además calcular el desplazamiento vertical del punto A

Datos

$$E_{cu} = 1.2 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$$

$$E_{ac} = 2.1 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$$

$$A_1 = 6 \text{ cm}^2$$

$$A_2 = 6 \text{ cm}^2$$

$$A_3 = 6 \text{ cm}^2$$

$$A_4 = 4 \text{ cm}^2$$

$$P_1 = 20000 \text{ kg}$$

$$P_2 = 14000 \text{ kg}$$

Incógnitas

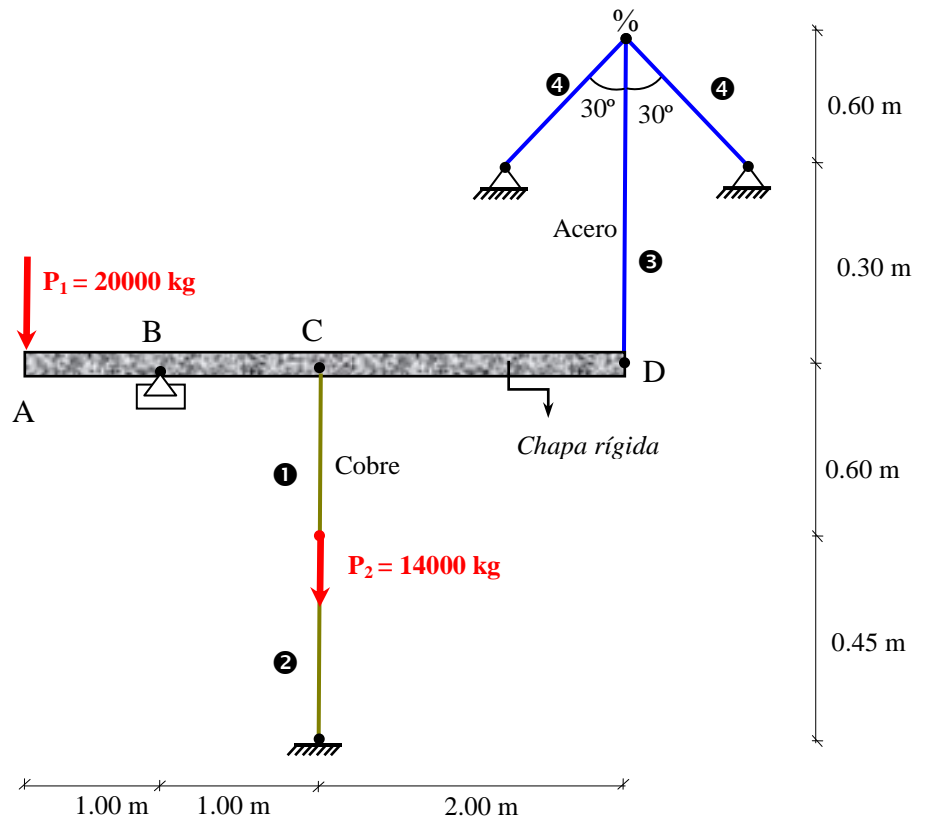
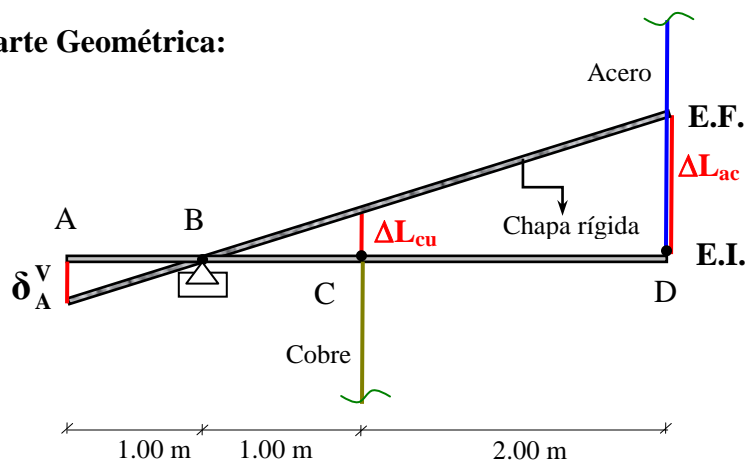
$$\sigma_1 = ?$$

$$\sigma_2 = ?$$

$$\sigma_3 = ?$$

$$\sigma_4 = ?$$

$$\delta_V^A = ?$$

**Solución****a) Parte Geométrica:**

$$\frac{\Delta L_{cu}}{1} = \frac{\Delta L_{ac}}{3}$$

$$3\Delta L_{cu} = \Delta L_{ac} \quad (1)$$

Ecuación de compatibilidad de deformaciones

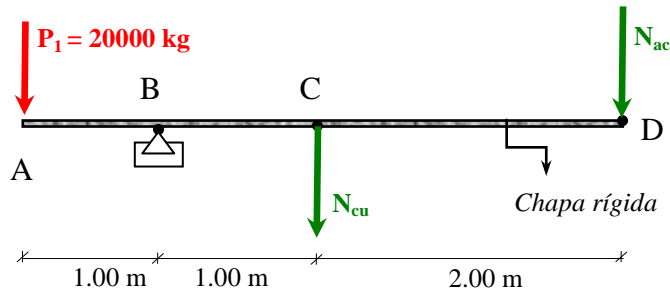
También: $\frac{\delta_v^A}{1} = \frac{\Delta L_{cu}}{1} \Rightarrow \boxed{\delta_v^A = \Delta L_{cu}}$

Propuesta:

ΔL_{cu} = alarga, entonces N_{cu} = tracción

ΔL_{ac} = acorta, entonces N_{ac} = compresión

b) Parte estática



$$\sum M_B = 0$$

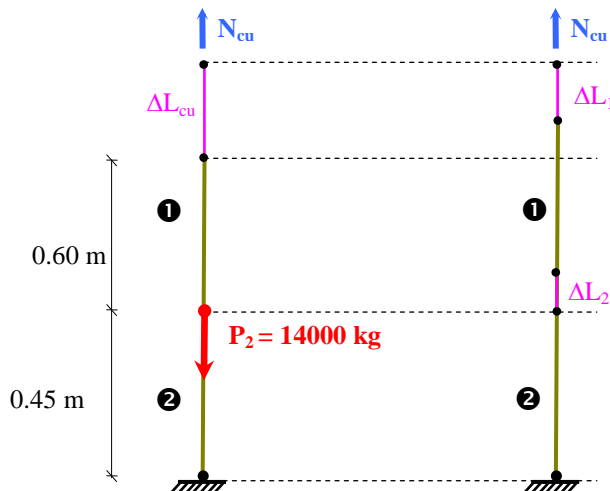
$$2000 * 1 - N_{cu} * 1 - N_{ac} * 3 = 0$$

$$\boxed{N_{cu} + 3N_{ac} = 2000} \quad (2)$$

Ecuación equilibrio estático

c) Parte física

Barra Cu:



$$\Delta L_{cu} = \Delta L_1 + \Delta L_2$$

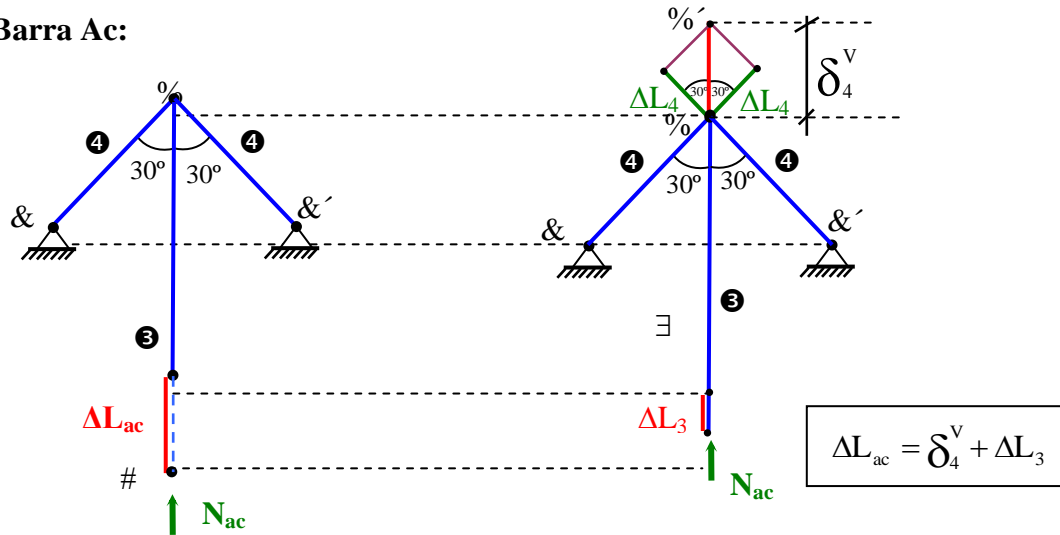
$$\Delta L_1 = \frac{N_1 * L_1}{E_{cu} * A_1} = \frac{N_{cu} * 60}{1.2 \times 10^6 * 6}$$

$$\Delta L_2 = \frac{N_2 * L_2}{E_{cu} * A_2} = \frac{(N_{cu} - 14000) * 45}{1.2 \times 10^6 * 6}$$

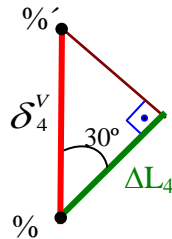
por tanto :

$$\boxed{\Delta L_{cu} = \frac{N_{cu} * 60}{1.2 \times 10^6 * 6} + \frac{(N_{cu} - 14000) * 45}{1.2 \times 10^6 * 6}} \quad (3a)$$

Ecuación física

Barra Ac:

En el gráfico podemos observar el siguiente triángulo:



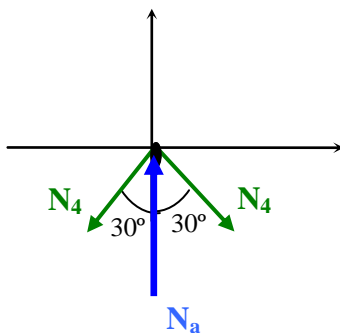
$$\cos 30^\circ = \frac{\Delta L_4}{\delta_4^v} \Rightarrow \delta_4^v = \frac{\Delta L_4}{\cos 30^\circ}$$

entonces: $\Delta L_{ac} = \frac{\Delta L_4}{\cos 30^\circ} + \Delta L_3$

pero:

$$\Delta L_3 = \frac{N_3 * L_3}{E_{ac} * A_2} = \frac{N_{ac} * 90}{E_{ac} * 6} = \frac{N_{ac} * 90}{2.1 \times 10^6 * 6}$$

$$\Delta L_4 = \frac{N_4 * L_4}{E_{ac} * A_4} = \frac{N_4 * \frac{60}{\cos 30^\circ}}{E_{ac} * 4} = \frac{N_4 * 60}{2.1 \times 10^6 * 4 * \cos 30^\circ}$$

Cálculo de N_4 

$$\sum F_v = 0$$

$$2N_4 \cos 30^\circ - N_{ac} = 0$$

$$N_4 = \frac{N_{ac}}{2 * \cos 30^\circ}$$

$$\Delta L_4 = \frac{N_{ac} * 60}{2.1 \times 10^6 * 8 * \cos^2 30^\circ}$$

Reemplazando luego en la ecuación de deformación de la barra de acero:

$$\Delta L_{ac} = \frac{N_{ac} * 60}{2.1 \times 10^6 * 8 * \cos^3 30^\circ} + \frac{N_{ac} * 90}{2.1 \times 10^6 * 6} \quad (3b)$$

Ecuación física

c) Parte final

Reemplazando las ecuaciones físicas (3a) y (3b) en (1)

$$3 * \left[\frac{N_{cu} * 60}{1.2 \times 10^6 * 6} + \frac{(N_{cu} - 14000) * 45}{1.2 \times 10^6 * 6} \right] = \frac{N_{ac} * 60}{2.1 \times 10^6 * 8 * \cos^3 30^\circ} + \frac{N_{ac} * 90}{2.1 \times 10^6 * 6}$$

$$N_{ac} = \frac{3 * \left[\frac{N_{cu} * 60}{1.2 \times 10^6 * 6} + \frac{(N_{cu} - 14000) * 45}{1.2 \times 10^6 * 6} \right]}{\frac{60}{2.1 \times 10^6 * 8 * \cos^3 30^\circ} + \frac{90}{2.1 \times 10^6 * 6}}$$

$$N_{ac} = 1.98N_{cu} + 1.48(N_{cu} - 14000) \quad (4)$$

(4) en (2)

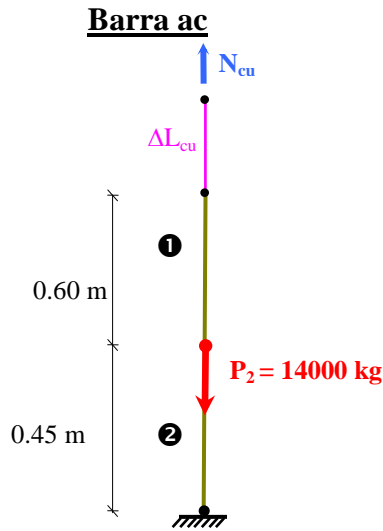
$$N_{cu} + 3[1.98N_{cu} + 1.48(N_{cu} - 14000)] = 2000$$

$$N_{cu} = 5637.96 \text{ k} \quad (5) \quad \text{Tracción}$$

(5) en (4)

$$N_{ac} = -1212.66 \text{ k} \quad \text{Tracción}$$

- **Calculo de Tensiones y Deformaciones de las barras elasticas**



$$N_1 = N_{cu} = 5637.93 \text{ k} \quad (\text{Tracción})$$

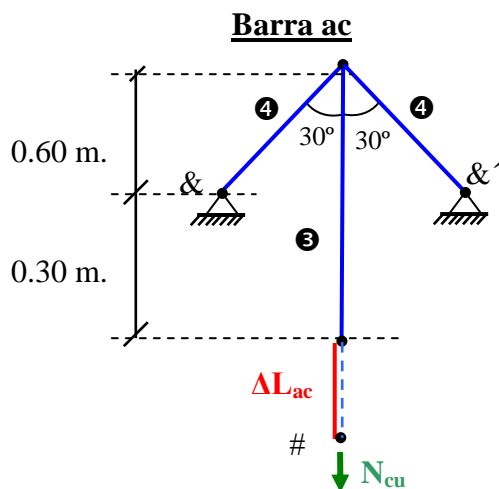
$$N_2 = N_{cu} - P_2 = -8362.07 \text{ k} \quad (\text{Compresión})$$

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{5637.93}{6} = 939.66 \frac{\text{k}}{\text{cm}^2} \quad (\text{Tracción})$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{8362.07}{6} = 1393.68 \frac{\text{k}}{\text{cm}^2} \quad (\text{Compresión})$$

$$\Delta L_{cu} = \frac{N_{cu} * 60}{1.2 \times 10^6 * 6} + \frac{(N_{cu} - 14000) * 45}{1.2 \times 10^6 * 6}$$

$$\Delta L_{cu} = -5.28 \times 10^{-3} \text{ cm} \quad (\text{Acortamiento})$$



$$N_3 = N_{ac} = 1212.66 \text{ k} \quad (\text{Tracción})$$

$$N_4 = \frac{N_{ac}}{2 * \cos 30^\circ} = 700.13 \text{ k} \quad (\text{Compresión})$$

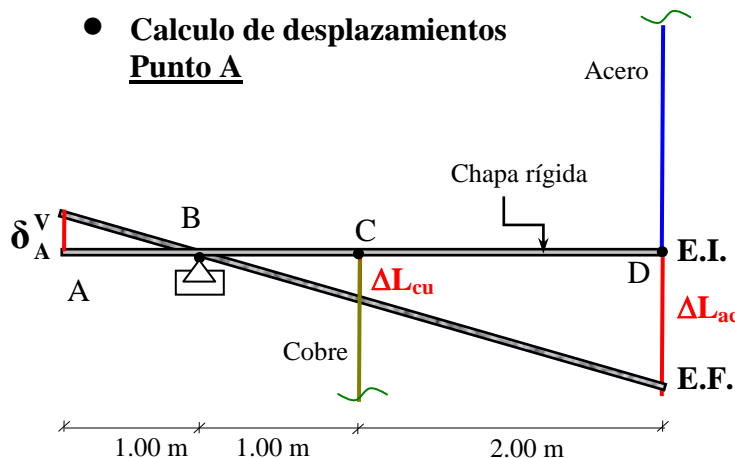
$$\sigma_3 = \frac{N_{31}}{A_3} = \frac{1212.66}{6} = 202.11 \frac{\text{k}}{\text{cm}^2} \quad (\text{Tracción})$$

$$\sigma_4 = \frac{N_4}{A_4} = \frac{700.13}{4} = 175.03 \frac{\text{k}}{\text{cm}^2} \quad (\text{Compresión})$$

$$\Delta L_{ac} = \frac{N_{ac} * 60}{2.1 \times 10^6 * 8 * \cos^3 30^\circ} + \frac{N_{ac} * 90}{2.1 \times 10^6 * 6}$$

$$\Delta L_{ac} = 15.33 \times 10^{-3} \text{ cm} \quad (\text{Alarga})$$

- **Calculo de desplazamientos**
Punto A



De acuerdo a los resultados el desplazamiento real es el que muestra el esquema, siendo:

$$\delta_v^A = \Delta L_{cu} = 5.28 \times 10^{-3} \text{ cm.}$$

Ejemplo 4:

Sea el sistema estructural colgante que consta de tres barras elásticas unidas en B, determinar el desplazamiento horizontal y vertical del punto B y las tensiones en cada barra.

Datos

$$A_1 = A_2 = A_3 = A = 6 \text{ cm}^2$$

$$E = 2 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$$

Incógnitas:

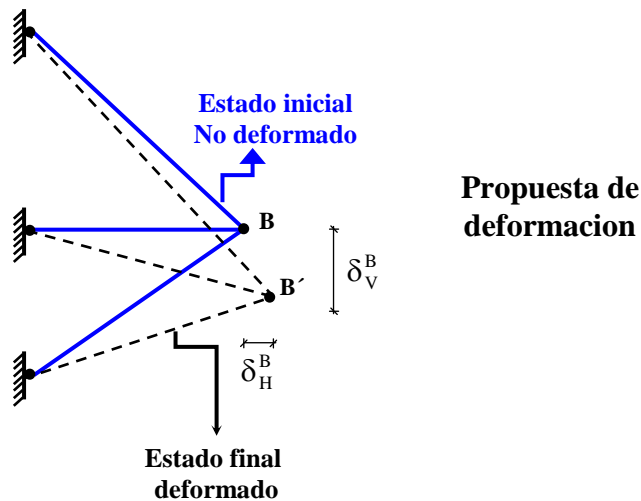
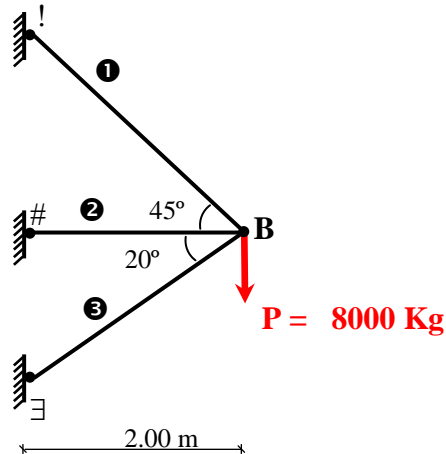
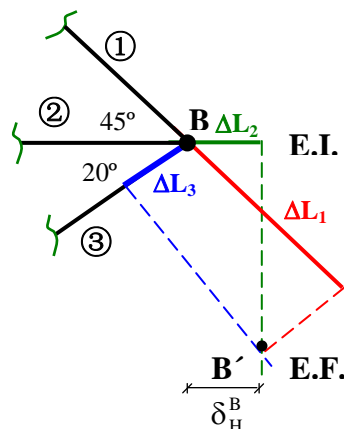
$$\sigma_1$$

$$\sigma_2$$

$$\sigma_3$$

$$\delta_V^B$$

$$\delta_H^B$$

Solución:**a) Parte Geométrica****Propuesta:**

$\Delta L_1 =$ alarga, entonces N_1 (tracción)

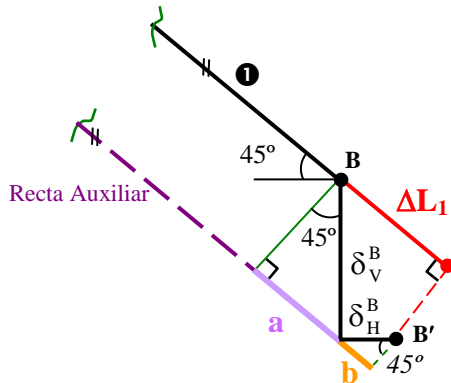
$\Delta L_2 =$ alarga, entonces N_2 (tracción)

$\Delta L_3 =$ acorta, entonces N_3 (compresión)

Analizando barra por barra colocando las deformaciones de las barras en función de los desplazamientos vertical y horizontal del punto B, tenemos :

$$\Delta L_i = f(\delta_v, \delta_H)$$

Barra 1:



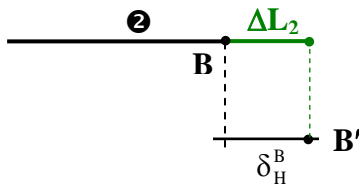
$$\Delta L_1 = a + b$$

$$\sin 45^\circ = \frac{a}{\delta_v^B} \rightarrow a = \delta_v^B \sin 45^\circ$$

$$\cos 45^\circ = \frac{b}{\delta_H^B} \rightarrow b = \delta_H^B \cos 45^\circ$$

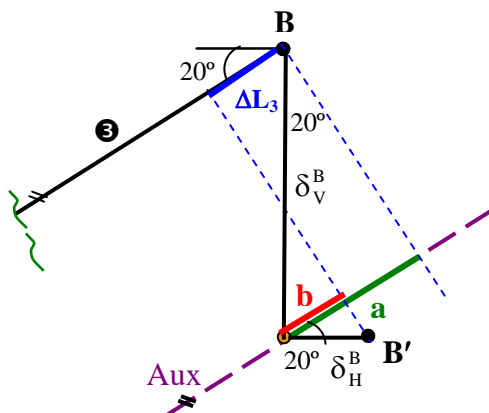
$$\Delta L_1 = \delta_v^B \sin 45^\circ + \delta_H^B \cos 45^\circ \quad \textcircled{1}$$

Barra 2



$$\Delta L_2 = \delta_H^B \quad \textcircled{2}$$

Barra 3

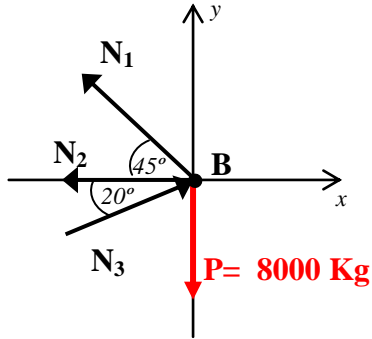


$$\Delta L_3 = a - b$$

$$\sin 20^\circ = \frac{a}{\delta_v^B} \rightarrow a = \delta_v^B \sin 20^\circ$$

$$\cos 20^\circ = \frac{b}{\delta_H^B} \rightarrow b = \delta_H^B \cos 20^\circ$$

$$\Delta L_3 = \delta_v^B \sin 20^\circ - \delta_H^B \cos 20^\circ \quad \textcircled{3}$$

b) Parte estática

$$\sum F_V = 0$$

$$N_1 \sin 45^\circ + N_3 \sin 20^\circ = 8000 \quad (4)$$

$$\sum F_H = 0$$

$$-N_1 \cos 45^\circ - N_2 + N_3 \cos 20^\circ = 0 \quad (5)$$

c) Parte Física

$$\left. \begin{aligned} \Delta L_1 &= \frac{N_1 \cdot \frac{200}{\cos 45^\circ}}{E \cdot A} \\ \Delta L_2 &= \frac{N_2 \cdot 200}{E \cdot A} \\ \Delta L_3 &= \frac{N_3 \cdot \frac{200}{\cos 20^\circ}}{E \cdot A} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

d) Parte final

Remplazando las expresiones (6) en las ecuaciones (1), (2) y (3) tenemos:

$$\frac{N_1 \cdot L}{E \cdot A \cdot \cos 45^\circ} = \delta_v^B \sin 45^\circ + \delta_v^B \cos 45^\circ \quad (7)$$

$$\frac{N_2 \cdot L}{E \cdot A} = \delta_H^B \quad (8)$$

$$\frac{N_3 \cdot L}{E \cdot A \cdot \cos 20^\circ} = \delta_v^B \sin 20^\circ - \delta_v^B \cos 20^\circ \quad (9)$$

Que conjuntamente con las expresiones ④ y ⑤ forman las cinco ecuaciones con cinco incógnitas para resolver.

$$N_1 \sin 45^\circ + N_3 \sin 20^\circ = 8000 \quad \text{④}$$

$$-N_1 \cos 45^\circ - N_2 + N_3 \cos 20^\circ = 0 \quad \text{⑤}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones nos da como resultado lo siguiente:

$$N_1 = 8449.32 \text{ k} \Rightarrow \sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = 1408.22 \frac{\text{k}}{\text{cm}^2} \text{ (Traccion)}$$

$$N_2 = -408.91 \text{ k} \Rightarrow \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = 68.15 \frac{\text{k}}{\text{cm}^2} \text{ (Compresion)}$$

$$N_3 = 5922.74 \text{ k} \Rightarrow \sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = 987.12 \frac{\text{k}}{\text{cm}^2} \text{ (Compresion)}$$

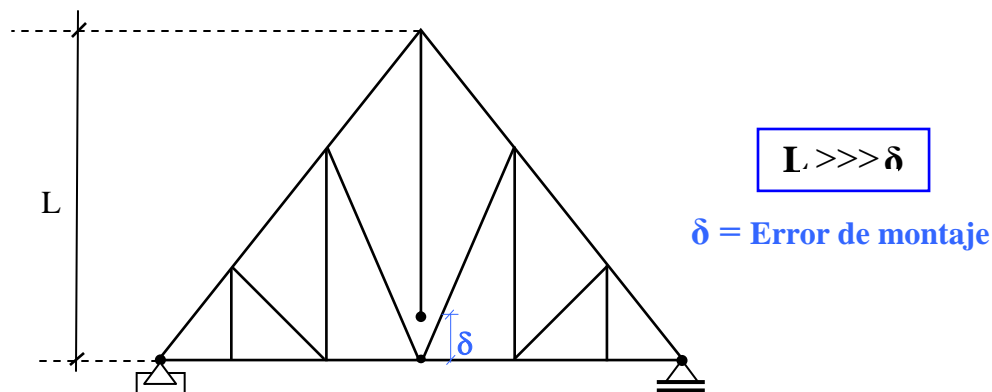
$$\delta_H^B = -0.0068 \text{ cm} \text{ (Se desplaza del punto B hacia la izquierda)}$$

$$\delta_V^B = 0.2885 \text{ cm} \text{ (Se desplaza del punto B hacia abajo)}$$

El signo negativo que aparecen en los resultados solamente significa que el sentido es contrario al asumido en la propuesta.

3.4.2 Problemas debido a error de montaje:

Son aquellas tensiones que aparecen en los sistemas estructurales debido a la aplicación de una fuerza momentánea para corregir algún error de dimensión que haya tenido alguno de los elementos, producto de una falla en la fabricación de los mismos, es bueno aclarar que este error de dimension debe ser pequeño en relación a las dimensiones del elemento a corregir.



Existen dos posibilidades si deseamos corregir el error de dimension de la barra central de la cercha metálica mostrada en la figura:

- fabricar otra barra con la dimensión correcta
- Aplicar una fuerza momentánea de tal forma de deformar la barra hasta ponerla en su sitio.

El caso que nos interesa es el segundo ya que nos ahorraríamos el costo y el trabajo de fabricar otra barra, pero este caso produce esfuerzos en las demás barras del sistema, siendo necesario verificar estas tensiones de tal manera de asegurar que no fallen producto de la corrección realizada. En este inciso se aprenderá a calcular dichas tensiones, para lograr este objetivo procederemos a analizar los sistemas estructurales que tengan error de montaje en alguno de sus elementos siguiendo la metodología aprendida en el inciso anterior.

Ejemplo 5:

Sea el sistema estructural de la figura que consta de tres barras elásticas, por error de fabricación la barra central es mas corta de lo que necesita. Determinar las tensiones en todas las barras elásticas producto del error de montaje (δ)

Datos

E

$$A_1 = A_2 = A$$

L

δ = Error de montaje

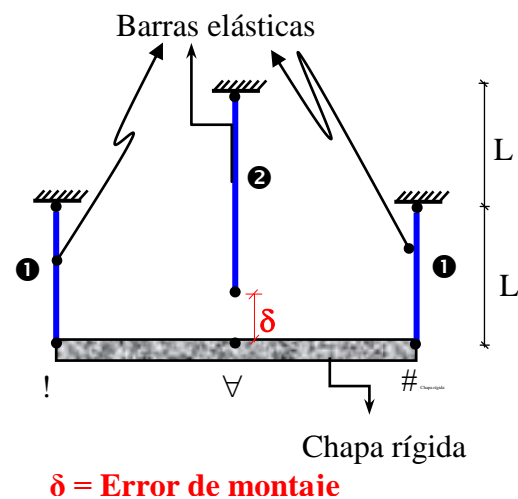
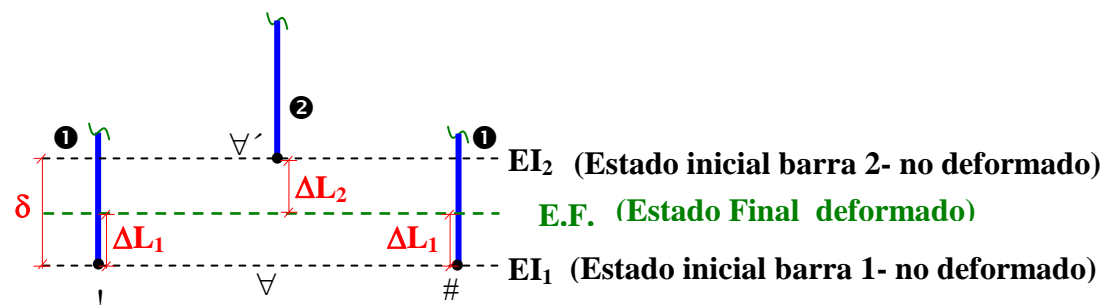
Incógnitas

$$\sigma_1 = ?$$

$$\sigma_2 = ?$$

Solución:

a) Parte Geométrica:

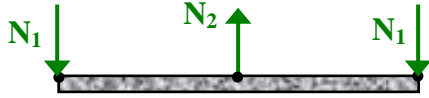


$$\Delta L_1 + \Delta L_2 = \delta \quad \textcircled{1} \quad \text{Ecuación de compatibilidad de deformaciones}$$

ΔL_1 = acorta, entonces N_1 (compresión)

ΔL_2 = alarga, entonces N_2 (tracción)

b) Parte estática:



$$\sum F_v = 0$$

$$2N_1 - N_2 = 0 \quad \textcircled{2}$$

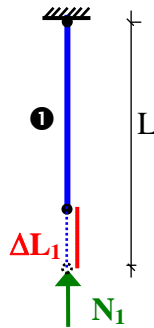
Ecuación equilibrio estático

c) Parte física

Barra Cu:

$$\Delta L_1 = \frac{N_1 * L}{E * A} \quad \textcircled{3a}$$

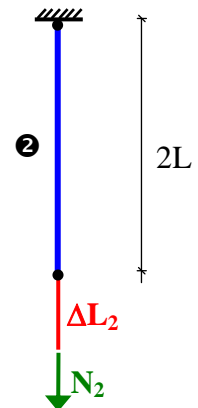
Ecuación física



Barra Ac:

$$\Delta L_2 = \frac{N_2 * 2L}{E * A} \quad \textcircled{3b}$$

Ecuación física



c) Parte final

Reemplazando las ecuaciones físicas $\textcircled{3a}$ y $\textcircled{3b}$ en $\textcircled{1}$

$$\delta = \frac{N_1 * L}{E * A} + \frac{N_2 * 2L}{E * A} \quad \textcircled{4}$$

De la expresión $\textcircled{2}$ tenemos que : $N_2 = 2N_1$ $\textcircled{5}$

Reemplazando $\textcircled{5}$ en $\textcircled{4}$ tenemos: $\delta = \frac{N_1 * L}{E * A} + \frac{2N_1 * 2L}{E * A}$

Despejando tenemos:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{5.8.E.A}{L} \\
 N_2 &= \frac{10.8.E.A}{L}
 \end{aligned}
 \Rightarrow
 \begin{aligned}
 \sigma_1 &= \frac{N_1}{A_1} = \frac{5.8.E}{L} \\
 \sigma_2 &= \frac{N_2}{A_2} = \frac{10.8.E}{L}
 \end{aligned}$$

3.5 Problemas debido a la variación de temperatura

La mayor parte de los materiales usados en la ingeniería debido a las variaciones de temperatura sufren cambio de sus dimensiones. Si la temperatura aumenta el material se dilata o se alarga, mientras que si la temperatura disminuye, el material se contrae o se acorta. Si el material es homogéneo y isótropo, se ha encontrado que la deformación de un elemento debido a la variación de la temperatura viene dada por:

$$\delta_t = \alpha * \Delta t * L$$

donde:

α : Coeficiente de dilatación térmica del material.

$\Delta t = |t_f - t_i|$: Variación de temperatura

t_f = Temperatura final.

t_i = Temperatura inicial.

L = Longitud del elemento estructural.

$\Delta t = | + |$, entonces el material se alarga debido al calentamiento.

$\Delta t = | - |$, entonces el material se acorta debido al enfriamiento.

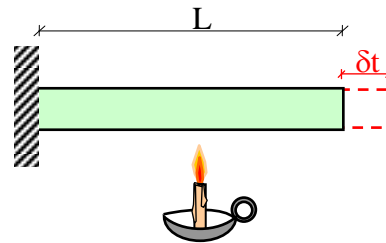
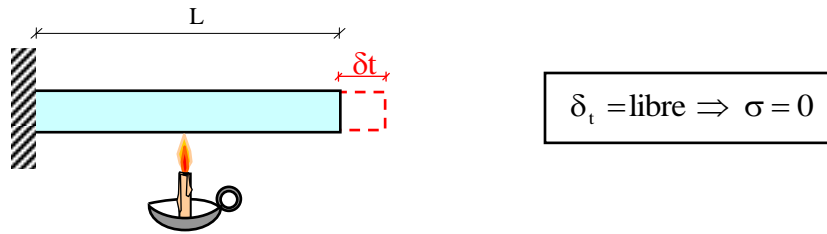


Tabla de coeficiente de dilatación

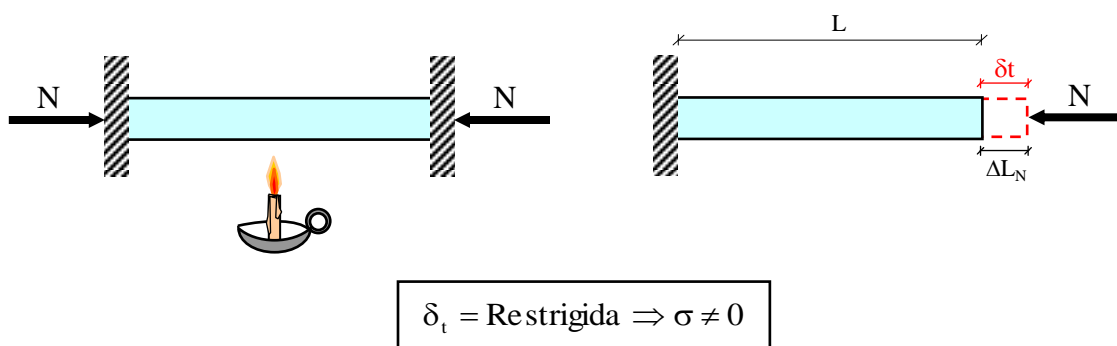
Material	$\alpha (^\circ\text{C}^{-1})$
Acero	11.6×10^{-6}
Aluminio	23.4×10^{-6}
Bronce	18.0×10^{-6}
Fundición Gris	10.8×10^{-6}
Latón	18.7×10^{-6}
Cobre	18.0×10^{-6}

En los sistemas estaticamente determinados se dejan deformar libremente los elementos debido al cambio de temperatura (Δt), este efecto no produce tensiones o esfuerzos en los elementos.



En cambio en sistemas estaticamente indeterminados las deformaciones debido a la variación de temperatura suelen estar restringidos parcial o totalmente, como resultado de ello aparecen fuerzas internas que contrarrestan parcial o totalmente, estas deformaciones. Las tensiones originadas por estas fuerzas internas se las llama **tensiones térmicas o esfuerzos térmicos**.

La determinación de las tensiones térmicas puede efectuarse usando la metodología delineados anteriormente, la única salvedad es que en la parte geométrica se debe incluir un estado de deformación producido por la variación térmica dejando al elemento deformar libremente por la variación de temperatura de tal forma que el efecto de contrarrestar esta deformación sea la que ocasiona tensión.



Ejemplo 6:

Determinar la tensión que aparecerá en una varrilla de acero de 2.50m, cuya sección es de 12cm^2 al decender la temperatura a -20°C , si la tensión de la varrilla es nula a los $+20^\circ\text{C}$. Para los siguiente casos:

- Muros completamente rígidos e indeformables.
- Muros que ceden ligeramente, acortándose su distancia en 0.5 mm.

Datos

$$L = 2.50 \text{ m.}$$

$$A = 12 \text{ cm}^2$$

$$t_i = +20 \text{ }^\circ\text{C}$$

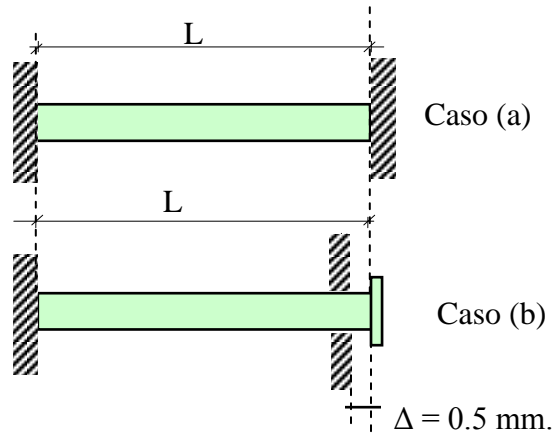
$$t_f = -20 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$\Delta t = |t_f - t_i| = |-40| \text{ }^\circ\text{C}$$

$$\alpha = 11.70 \times 10^{-6} \text{ (}^\circ\text{C)}^{-1}$$

$$E_{ac} = 2.1 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\Delta = 0.5 \text{ mm.}$$

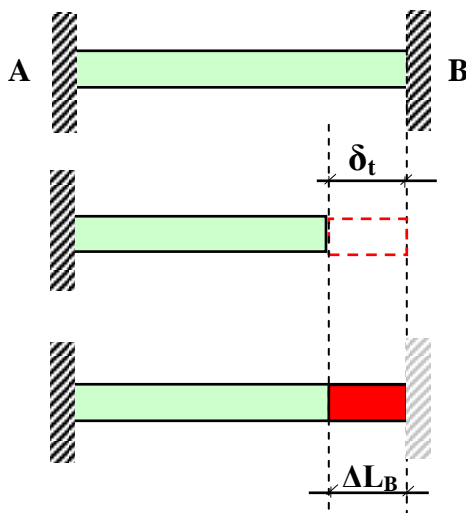
**Incógnitas**

$$\text{Caso (a)} \longrightarrow \sigma = ?$$

$$\text{Caso (b)} \longrightarrow \sigma = ?$$

Solución: Caso (a): Muros rígidos

a) Parte Geométrica



Estado inicial no deformado

Estado deformado Δt : se deja deformar libremente (no produce tensión)

Estado Final o Estado de equilibrio: se obliga al elemento a deformarse hasta llegar a la posición de equilibrio (produce tensión).

$$\delta t = \Delta L_B$$

① Ecuación de compatibilidad de deformación

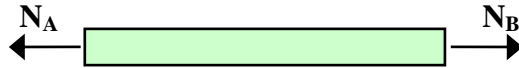
Donde:

$$\delta t = \alpha \cdot \Delta t \cdot L \quad \text{deformación debido a la variación de temperatura}$$

$$\Delta L_B = \text{Alargamiento} \longrightarrow N_B = \text{Tracción}$$

b) Parte estática:

Para que se produzca ΔL_B obligatoriamente esta ha tenido que ser ocasionada por una fuerza interna N_B , quedando el sistema de equilibrio de la siguiente manera:



$$\sum N = 0 \Rightarrow N_A = N_B$$

② Ecuación de equilibrio estático

c) Parte física:

Planteamos la ley de Hooke para relacionar las deformaciones con las fuerzas aplicadas de cada elemento, para nuestro caso:

$$\Delta L_B = \frac{N_B \cdot L}{E \cdot A}$$

③ Ecuación física

d) Parte final:

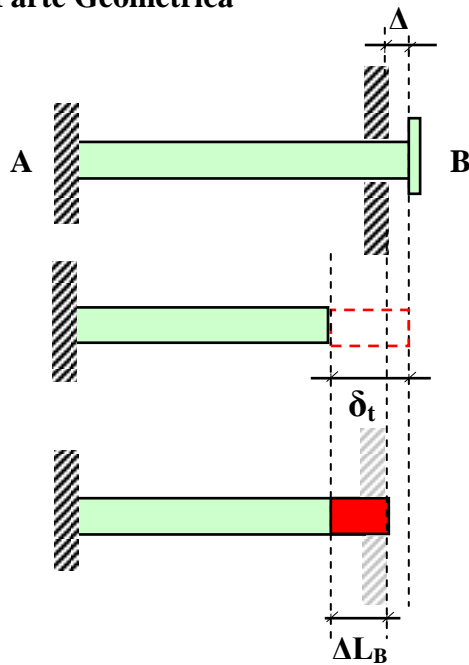
Remplazamos ③ en ① y tenemos:

$$\alpha \cdot \Delta t \cdot L = \frac{N_B \cdot L}{E \cdot A} \Rightarrow N_B = \alpha \cdot \Delta t \cdot E \cdot A \Rightarrow \sigma = \frac{N_B}{A} \Rightarrow \sigma = \alpha \cdot \Delta t \cdot E$$

Remplazando los datos tenemos:

$$\sigma = 982.80 \frac{\text{k}}{\text{cm}^2}$$

**Respuesta
Caso (a)**

Solución: Caso (b): Muros deslizables**a) Parte Geométrica****Estado inicial** no deformado**Estado deformado Δt :** se deja deformar libremente (no produce tensión)**Estado Final** o Estado de equilibrio: se obliga al elemento a deformarse hasta llegar a la posición de equilibrio (produce tensión).

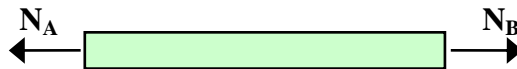
$$\delta t = \Delta L_B + \Delta$$

① Ecuación de compatibilidad de deformación

Donde:

 $\delta t = \alpha \cdot \Delta t \cdot L$ deformación debido a la variación de temperatura $\Delta L_B = \text{Alargamiento} \Rightarrow N_B = \text{Tracción}$ **b) Parte estática:**

Para que se produzca ΔL_B obligatoriamente esta ha tenido que ser ocasionada por una fuerza interna N_B , quedando el sistema de equilibrio de la siguiente manera:



$$\sum N = 0 \Rightarrow N_A = N_B$$

② Ecuación de equilibrio estático

c) Parte física:

Planteamos la ley de Hooke para relacionar las deformaciones con las fuerzas aplicadas de cada elemento, para nuestro caso:

$$\Delta L_B = \frac{N_B \cdot L}{E \cdot A}$$

③ Ecuación física

d) Parte final:

Remplazamos ③ en ① y tenemos:

$$\alpha \cdot \Delta t \cdot L = \frac{N_B \cdot L}{E \cdot A} + \Delta \Rightarrow N_B = \frac{(\alpha \cdot \Delta t \cdot L - \Delta) \cdot E \cdot A}{L} \Rightarrow \sigma = \frac{N_B}{A} \Rightarrow \sigma = \frac{(\alpha \cdot \Delta t \cdot L - \Delta) \cdot E}{L}$$

Remplazando los datos tenemos: $\sigma = 562.80 \frac{\text{k}}{\text{cm}^2}$ **Respuesta**
Caso (b)

Ejemplo 7:

Sea el sistema estructural mostrado en la figura que está sometida la barra de latón a una diferencia de temperatura de -30°C y la barra de acero a $+30^\circ\text{C}$, calcular los esfuerzos o tensiones en las barras de latón y acero.

Datos

$$A_L = 7 \text{ cm}^2$$

$$\alpha_L = 18.7 \times 10^{-6} ^\circ\text{C}^{-1}$$

$$E_L = 1 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$$

$$A_{ac} = 3 \text{ cm}^2$$

$$\alpha_{ac} = 11.6 \times 10^{-6} ^\circ\text{C}^{-1}$$

$$E_{ac} = 2 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$$

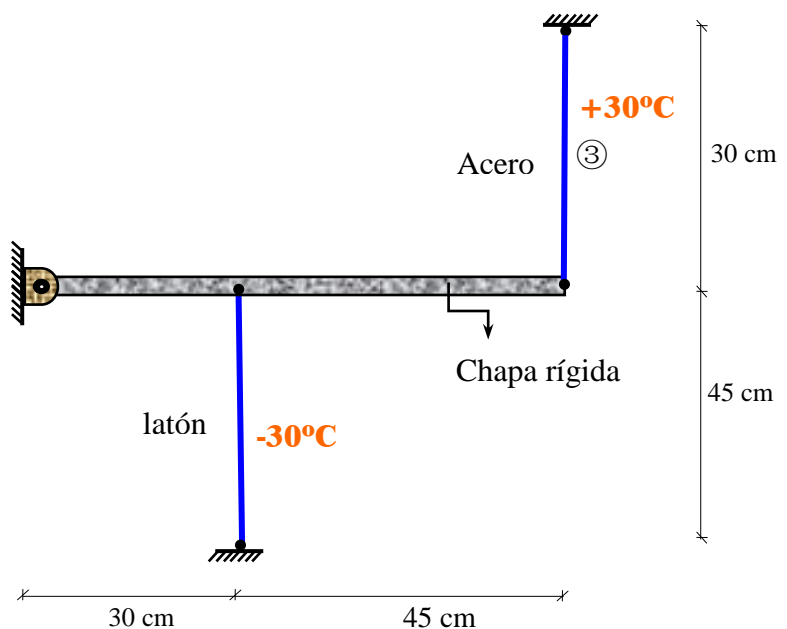
$$\Delta t_{ac} = +30^\circ\text{C}$$

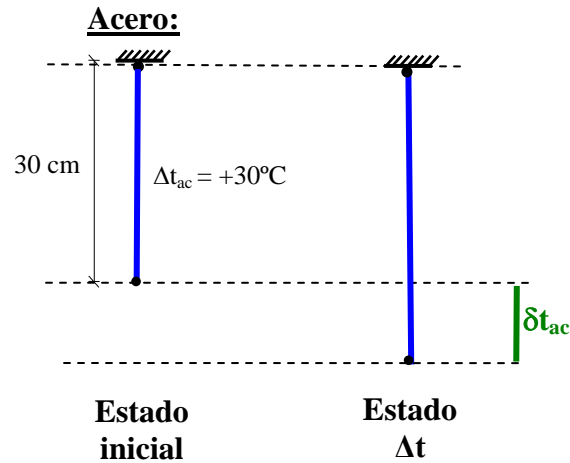
$$\Delta t_{lat} = -30^\circ\text{C}$$

Incógnitas:

$$\sigma_L$$

$$\sigma_{ac}$$

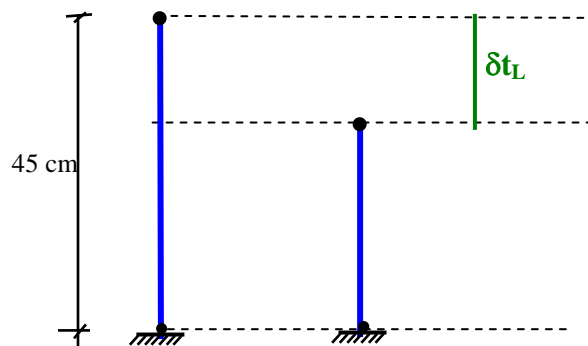


Solución**a) Parte Geométrica****a1) Deformación debido a la variación de la temperatura (Δt_i)**

$$\delta t_{ac} = \alpha_{ac} * |\Delta t_{ac}| * L_{ac}$$

$$\delta t_{ac} = 11.6 \times 10^{-6} * |30| * 30$$

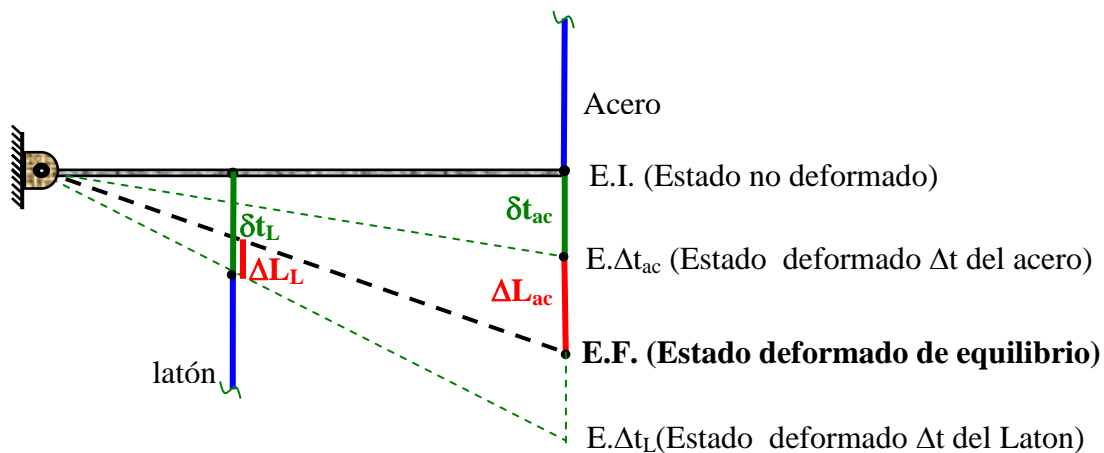
$$\delta t_{ac} = 0.0104 \text{ cm} \quad \text{alarga}$$

Latón:

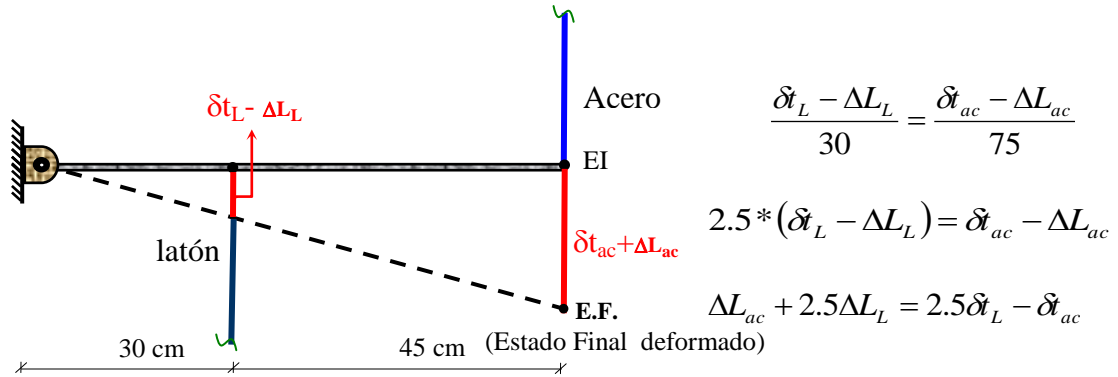
$$\delta t_L = \alpha_L * |\Delta t_L| * L_L$$

$$\delta t_L = 18.7 \times 10^{-6} * |-30| * 45$$

$$\delta t_L = 0.0252 \text{ cm} \quad \text{acorta}$$



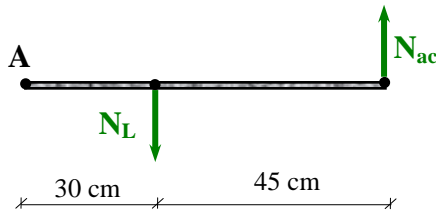
Redefiniendo:



$$\textcircled{1} \quad \Delta L_{ac} + 2.5 \Delta L_L = 0.0526$$

Ecuación de compatibilidad de deformaciones

b) Parte estática:



$$\sum M_A = 0$$

$$30N_L - 75N_{ac} = 0 \quad \textcircled{2}$$

Ecuación equilibrio estático

c) Parte física

Barra de acero

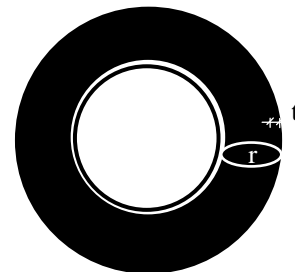
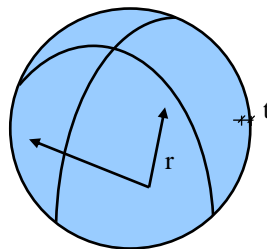
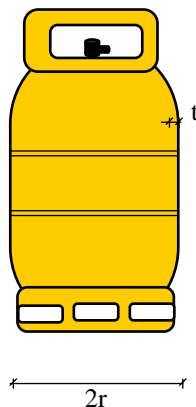
Barra de Latón

$$\Delta L_{ac} = \frac{N_{ac} * L_{ac}}{E_{ac} * A_{ac}}$$

$$\Delta L_L = \frac{N_L * L_L}{E_L * A_L}$$

3.6 Tensiones y deformaciones en cilindros de pared delgada.

Ejemplos



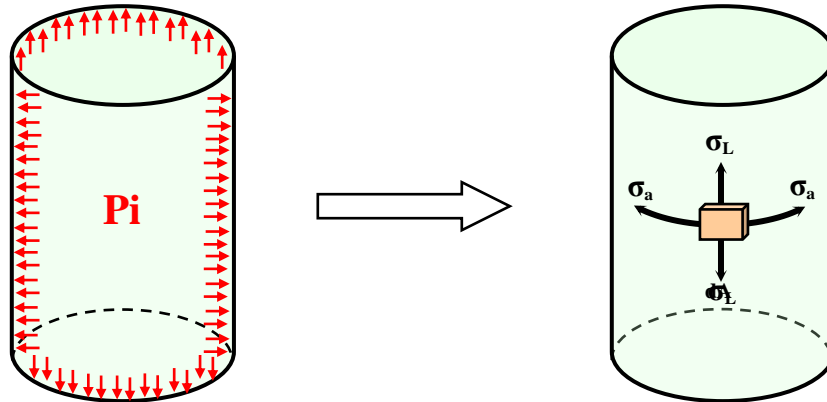
Condicion para ser considerado cilindro de pared delgada

donde: r = radio generador

t = espesor de la pared delgada.

$$\frac{r}{10} \geq t$$

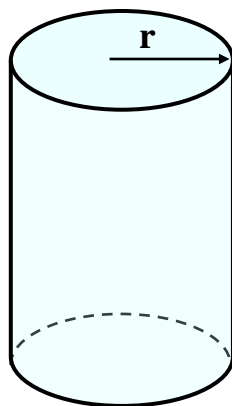
Si existen presiones internas existen tensiones:



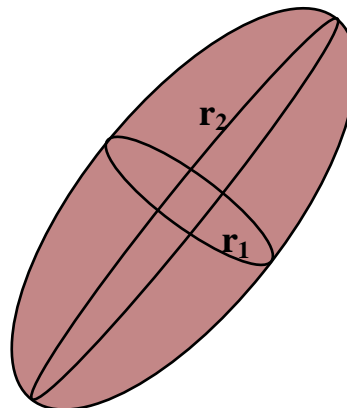
Debido a que partimos de la condicion que el cilindro es de pared delgada, podemos realizar el estudio tensional de forma unidimensional.

Estudiaremos dos tipos de cilindros de pared delgada.

- a) Cilindros generados por un radio de curvatura
- b) Cilindros generados por dos radios de curvatura.



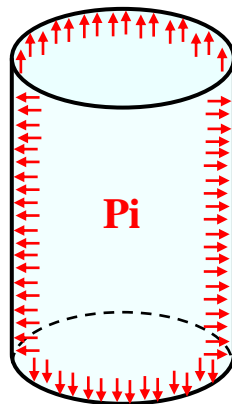
a)



b)

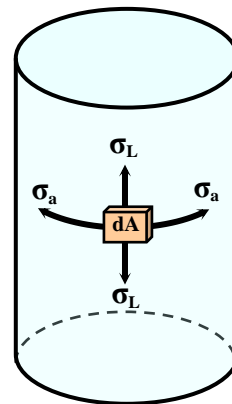
3.6.1 Cilindros de un radio de curvatura:

a) Tensiones:



Estado de carga

Lo que queremos estudiar

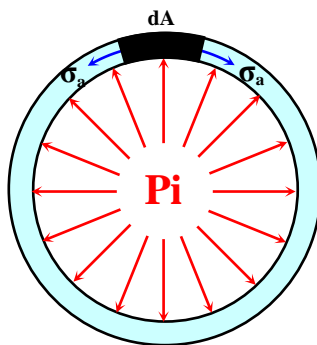


Estado tensional

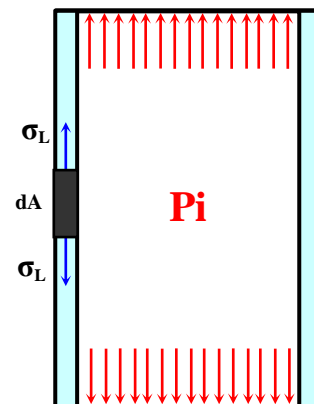
Donde: σ_a = Tension anular

σ_L = Tension longitudinal

Por separado tenemos:

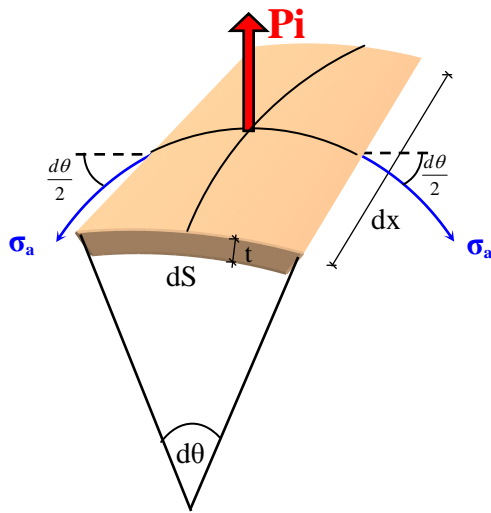
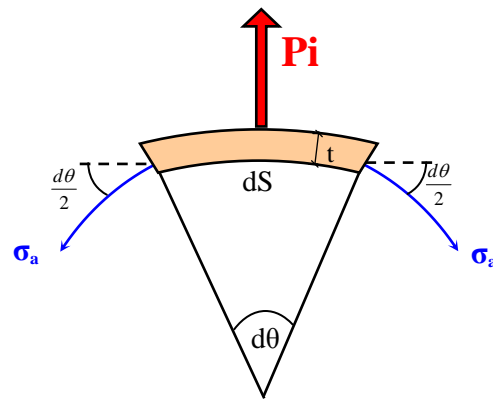
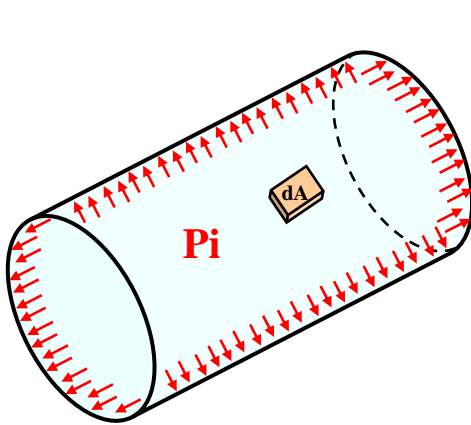


σ_a = Tension anular



σ_L = Tension longitudinal

Analizando el elemento diferencial:



$$\sum F_v = 0$$

$$P_i \cdot dS \cdot dx - 2\sigma_a \cdot t \cdot dx \cdot \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) = 0$$

$$dS = r \cdot d\theta$$

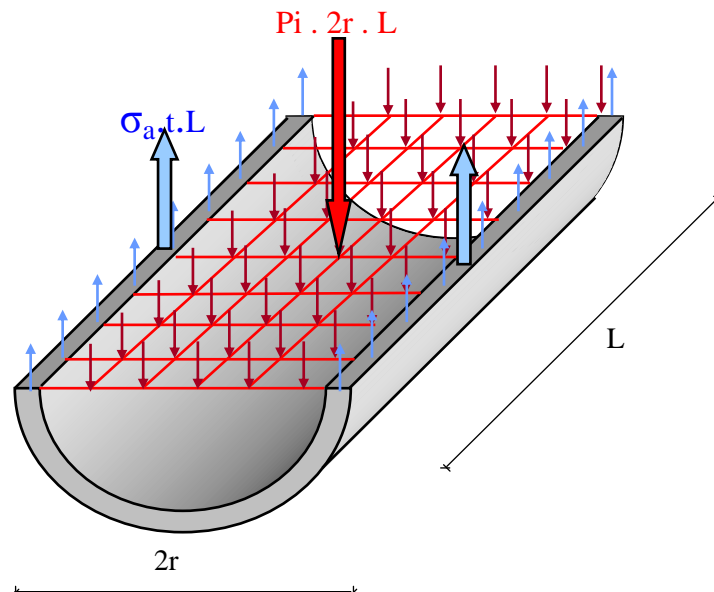
si $d\theta$ es pequeño, $\Rightarrow \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) \approx \frac{d\theta}{2}$

$$P_i \cdot r \cdot d\theta \cdot dx - 2\sigma_a \cdot t \cdot dx \cdot \frac{d\theta}{2} = 0$$

$$\sigma_a = \frac{P_i \cdot r}{t}$$

Ecuación que gobierna Las tensiones anulares en paredes delgadas de cilindros de un radio de curvatura.

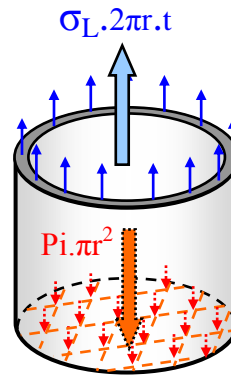
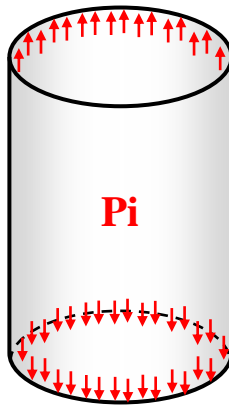
Partiendo del conocimiento que las fuerzas horizontales se anulan:



$$\sum V = 0 \longrightarrow P_i \cdot 2r \cdot L = 2\sigma_a \cdot t \cdot L$$

$$\sigma_a = \frac{P_i \cdot r}{t}$$

a₂) Tension Longitudinal:



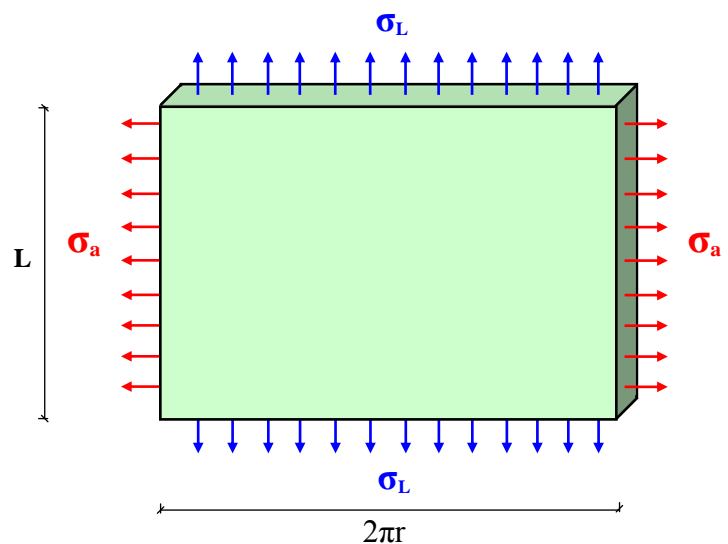
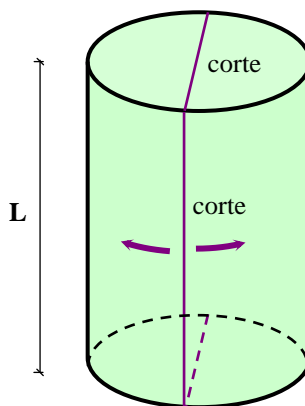
$$\sum F = 0$$

$$\sigma_L \cdot 2\pi r \cdot t = P_i \cdot \pi r^2$$

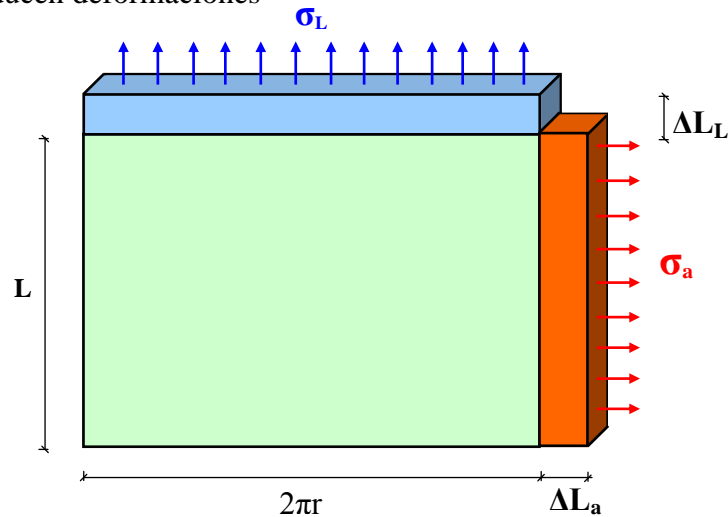
$$\sigma_L = \frac{P_i \cdot r}{2t}$$

Ecuación que gobierna las tensiones longitudinales en paredes delgadas de cilindros de un radio de curvatura.

b) Deformaciones:



Estas tensiones producen deformaciones



ΔL_a = Deformación del perímetro debido a la σ_a

ΔL_L = Deformación de la longitud debido a la σ_L

Por tanto:

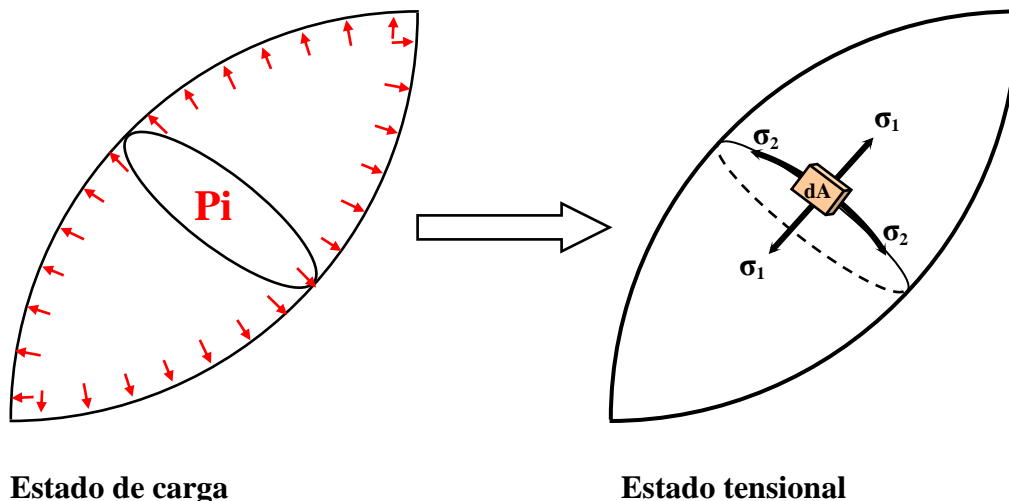
$$\Delta L = \frac{N \cdot L}{E \cdot A}, \text{ Sabiendo que : } \sigma = \frac{N}{A}, \text{ entonces } \Delta L = \frac{\sigma \cdot L}{E}$$

luego:

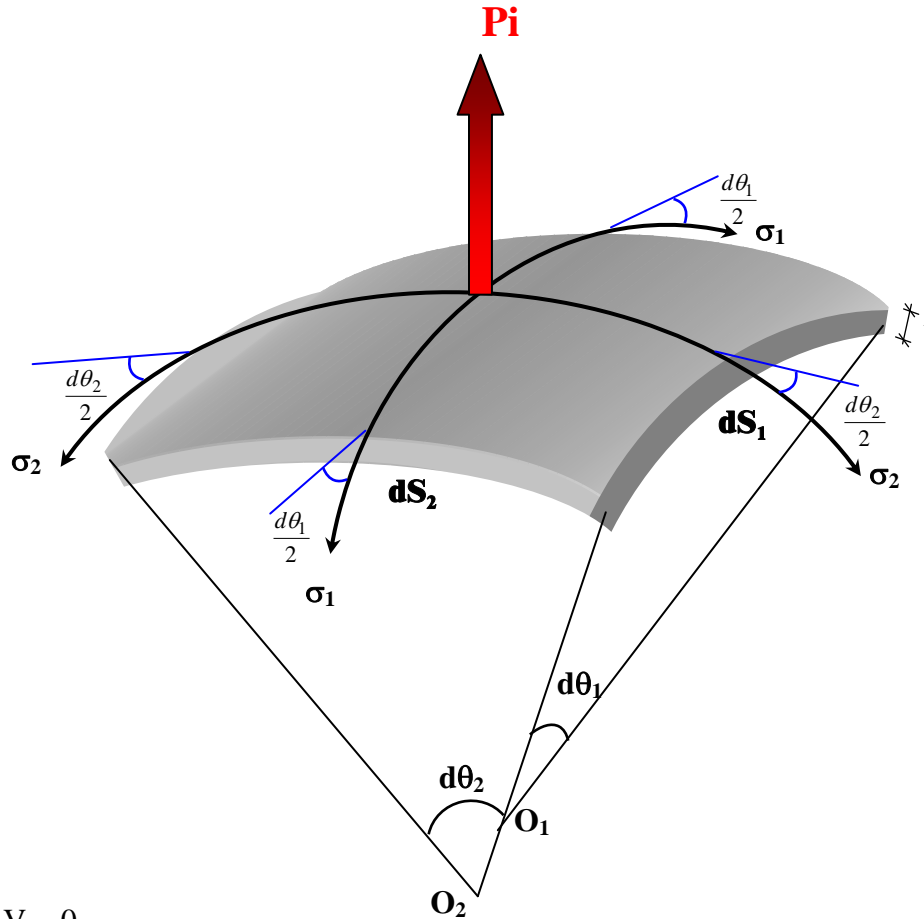
$$\Delta L_a = \frac{\sigma_a \cdot 2\pi r}{E} = \frac{P_i \cdot r \cdot 2\pi r}{t \cdot E} \Rightarrow \Delta L_a = \frac{2\pi r^2 \cdot P_i}{t \cdot E}$$

$$\Delta L_L = \frac{\sigma_L \cdot L}{E} = \frac{P_i \cdot r \cdot L}{2 \cdot t \cdot E} \Rightarrow \Delta L_L = \frac{L \cdot r \cdot P_i}{2t \cdot E}$$

3.6.2 Cilindros con dos radios de curvatura:



Analizando el elemento diferencial



$$\sum V = 0$$

$$P_i \cdot dS_1 \cdot dS_2 - 2\sigma_1 \cdot dS_2 \cdot t \cdot \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) - 2\sigma_2 \cdot dS_1 \cdot t \cdot \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) = 0$$

$$\begin{aligned} dS_1 &= r_1 \cdot d\theta_1 \\ dS_2 &= r_2 \cdot d\theta_2 \end{aligned} \quad \text{si } d\theta_i \text{ es pequeño, entonces : } \sin\left(\frac{d\theta_i}{2}\right) = \frac{d\theta_i}{2}$$

Reemplazando:

$$P_i \cdot r_1 \cdot d\theta_1 \cdot r_2 \cdot d\theta_2 - 2\sigma_1 \cdot r_2 \cdot d\theta_2 \cdot t \cdot \frac{d\theta_1}{2} - 2\sigma_2 \cdot r_1 \cdot d\theta_1 \cdot t \cdot \frac{d\theta_2}{2} = 0$$

$$P_i \cdot r_1 \cdot r_2 = \sigma_1 \cdot r_2 \cdot t + \sigma_2 \cdot r_1 \cdot t \quad * \quad \frac{1}{r_1 \cdot r_2 \cdot t}$$

$$\frac{P_i}{t} = \frac{\sigma_1}{r_1} + \frac{\sigma_2}{r_2}$$

Ecuación que gobierna las tensiones en cilindros de pared delgada con dos radios de curvatura

Ejemplo 7:

Determinar la ecuación que gobierna las tensiones de una pelota de basketball sometida a una presión interna q_i .

Datos

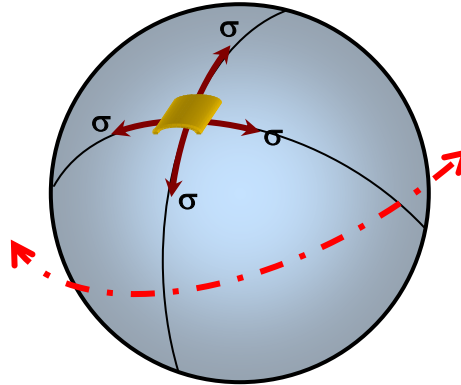
$$r_1 = r_2 = r$$

t = espesor

q_i = presión

Incógnitas

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$$



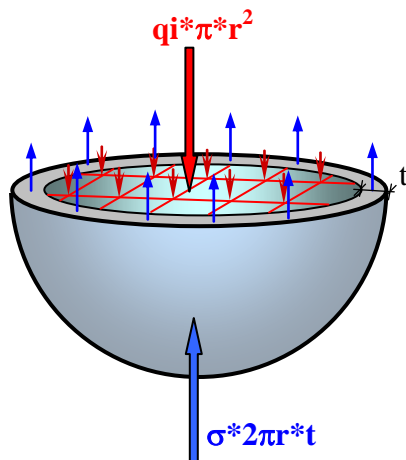
como es una pelota totalmente esférica $r_1 = r_2 = r$

Aplicando la fórmula para un cilindro de pared delgada de dos radios de curvatura tenemos:

$$\frac{q_i}{t} = \frac{\sigma}{r} + \frac{\sigma}{r}$$

$$\frac{q_i}{t} = \frac{2\sigma}{r} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma_{\oplus} = \frac{q_i \cdot r}{2t}}$$

Solución seccionando la pelota:



$$\sum V = 0$$

$$q_i \cdot \pi \cdot r^2 = \sigma \cdot 2\pi \cdot r \cdot t$$

$$\boxed{\sigma_{\oplus} = \frac{q_i \cdot r}{2t}}$$

